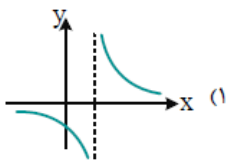
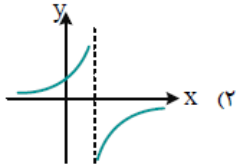
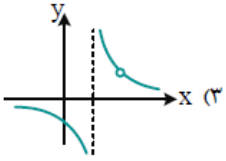
پاسخ آزمون (۳) ریاضی / تاریخ : ۱۴۰۲/۱۲/۲۶ به نام خدا تعداد سوال: ۴۰ / زمان : ۵۵ دقیقه

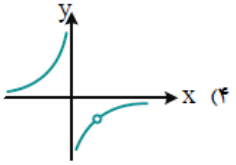
ریاضی پایه–۱۰ سوال ۱۵ دقیقه: ۱-

۱ اگر $f(x)=\log_x^{۲x}$ و $f^{-۱}(x)=۲^{g(x)}$ باشد، کدام گزینه نمودار تابع $g(x)$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

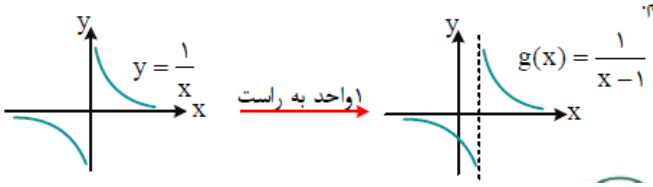
پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطهٔ تابع $y=f^{-۱}(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\log_x^{۲x}=\log_x^{۲}+\log_x^{x}=\frac{۱}{\log_۲^x}+۱\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{\log_۲^x}\xrightarrow{\text{معکوس}}\log_۲^x=\frac{۱}{y-۱}\Rightarrow x=۲^{\frac{۱}{y-۱}}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲^{\frac{۱}{x-۱}}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$$

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ را با کمک انتقال از روی نمودار $y=\frac{۱}{x}$ رسم می‌کنیم.



۲ حاصل عبارت $A=\frac{\log ۶۰+\log ۲\times\log ۳}{\log ۱۵۰+\log ۳\times\log ۵}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{۱+\log ۳}{۲-\log ۳}$ ۲) $\frac{۱+\log ۲}{۲-\log ۲}$ ۳) $\frac{۱+\log ۵}{۲-\log ۵}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

تعریف لگاریتم و قواعد آن:

$$a^b=c\Leftrightarrow\log_a^c=b\quad(c>۰,a>۰,a\neq۱)$$

۱) $\log_a^۱=۰$

۲) $\log_a^a=۱$

۳) $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$

۴) $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$

۵) $\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$

۶) $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ c عدد دلخواه $c\neq۱,c>۰$

۷) $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$

۸) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$

۹) $\log_{۱۰}^a=\log a$

۱۰) $\log ۲+\log ۵=۱$

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های موجود در صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$\log \overset{۲\times۳\times۱۰}{۶۰} + \log ۲\times\log ۳ = \log ۲ + \log ۳ + \cancel{\log ۱۰}^{۱} + \log ۲\times\log ۳ = (۱+\log ۲)\times(۱+\log ۳)$$

$$\log \overset{۵\times۳\times۱۰}{۱۵۰} + \log ۳\times\log ۵ = \log ۵ + \log ۳ + \cancel{\log ۱۰}^{۱} + \log ۳\times\log ۵ = (۱+\log ۵)\times(۱+\log ۳)$$

بنابراین:

$$A = \frac{(۱+\log ۲)(۱+\log ۳)}{(۱+\log ۵)(۱+\log ۳)} = \frac{۱+\log ۲}{۱+\log ۵} \xrightarrow{\log ۵ = ۱-\log ۲} A = \frac{۱+\log ۲}{۲-\log ۲}$$

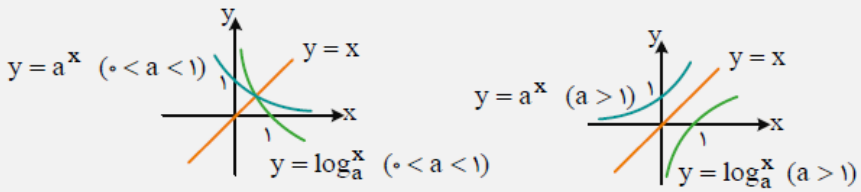
گروه آموزشی ماز

۳ معادلهٔ $\log_۲^x = ۲\log_۳^{(x-۱)}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

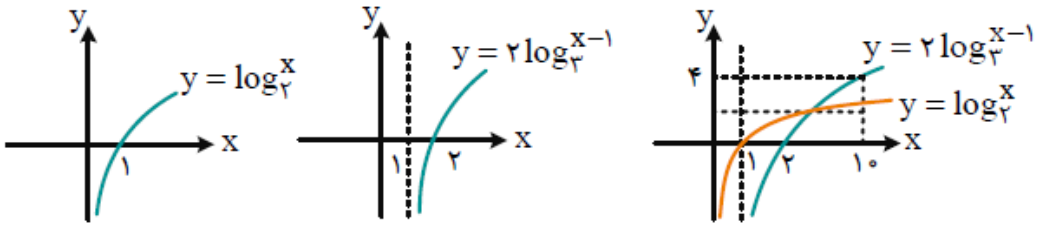
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

نمودار توابع نمایی و لگاریتمی:



پاسخ تشریحی:

نمودار هر دو تابع را با هم در یک دستگاه رسم می‌کنیم و با کمک روش هندسی، تعداد جواب‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:



توجه کنید در $x = ۱۰$ تابع $y = ۲\log_۳^{x-۱}$ مقداری بیشتر از تابع $y = \log_۲^x$ دارد. زیرا:

$$\underbrace{۲\log_۳^{۹}}_{۴} > \underbrace{\log_۲^{۱۰}}_{\text{کمتر از ۴}}$$

در $x = ۲$ تابع $y = \log_۲^x$ مقدار بیشتری از تابع $y = ۲\log_۳^{x-۱}$ دارد، زیرا:

$$\underbrace{۲\log_۳^{۱}}_{۰} < \underbrace{\log_۲^{۲}}_{۱}$$

با توجه به نمودار دو تابع، فقط یک نقطهٔ تقاطع وجود دارد که بین ۲ تا ۱۰ است، پس معادله ۱ جواب دارد. به سادگی می‌توان دریافت که جواب معادله ۴ است.

۴ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: برای تعریف شدن عبارت $\log_{g(x)} f(x)$، باید شروط $f(x) > ۰$، $g(x) > ۰$ و $g(x) \neq ۱$ برقرار باشند.

نکته: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

تابع f دارای مجانب قائم و وارون آن که تابعی نمایی است، دارای مجانب افقی است.

نمودار تابع نمایی $f^{-۱}$ بالای $y = ۲$ است، پس نمودار تابع f سمت راست $x = ۲$ است. در واقع دامنهٔ f بازهٔ $(۲, +\infty)$ است. پس:

$$x - b > ۰ \Rightarrow x > b \Rightarrow b = ۲$$

نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$ روی خط $y = x$ واقع است، پس:

$$f(۳) = ۳ \Rightarrow a - \log_۲(۳-۲) = ۳ \Rightarrow a - \log_۲ ۱ = ۳ \Rightarrow a = ۳$$

پس $f(x) = ۳ - \log_۲(x-۲)$ و برای یافتن x_B و y_A داریم:

$$f(x_B) = ۰ \Rightarrow ۳ - \log_۲(x_B - ۲) = ۰ \Rightarrow \log_۲(x_B - ۲) = ۳ \Rightarrow x_B - ۲ = ۲^۳ = ۸ \Rightarrow x_B = ۱۰$$

از آنجا که $f^{-۱}(۲) = y_A$، خواهیم داشت:

$$f^{-۱}(۲) = y_A \Rightarrow f(y_A) = ۲ \Rightarrow ۳ - \log_۲(y_A - ۲) = ۲ \Rightarrow \log_۲(y_A - ۲) = ۱ \Rightarrow y_A - ۲ = ۲^۱ \Rightarrow y_A = ۴$$

بنابراین:

$$x_B + y_A = ۱۰ + ۴ = ۱۴$$

۵ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و بالعکس، اگر $x, y > ۰$ و $x = y$، آنگاه:

$$\log_a x = \log_a y$$

نکته: $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

نکته: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

ضابطهٔ دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ A را به‌دست آوریم:

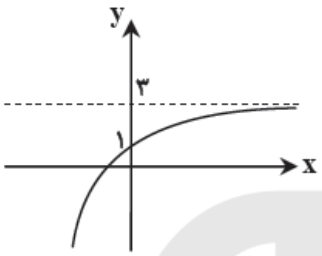
$$۵ - ۲\log_۲(x-۱) = -۱ + ۲\log_۲(x+۱) \Rightarrow ۲\log_۲(x+۱) + ۲\log_۲(x-۱) = ۶$$

$$\Rightarrow \log_۲(x+۱)(x-۱) = ۳ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲^۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \Rightarrow y = ۳ \\ x = -۳ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

پس نقطهٔ $A(۳,۳)$ نقطهٔ برخورد دو تابع است.

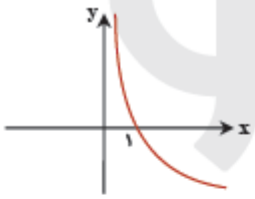
$$\begin{cases} \alpha = ۳ \\ \beta = ۳ \end{cases} \Rightarrow y = ۳ - ۲^{۱-۲x}$$

نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است که مطابق شکل تابع از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

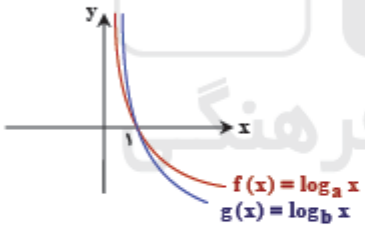


۶ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اگر $۰ < a < ۱$، نمودار تابع $y = \log_a x$ به‌صورت زیر است:



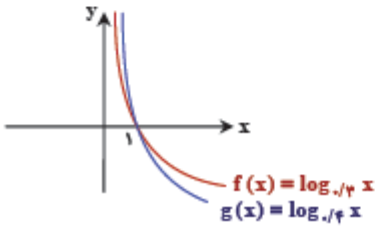
نکته: اگر a و b دو عدد مثبت به‌گونه‌ای باشند که $۰ < a < b < ۱$، آنگاه نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ و $g(x) = \log_b x$ نسبت به یکدیگر به‌شکل روبه‌رو است.



برای یافتن دامنهٔ تابع داده‌شده در سؤال، با توجه به نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال داریم:

$$\log_{۰/۴} x - \log_{۰/۴} x \geq ۰ \Rightarrow \log_{۰/۴} x \geq \log_{۰/۳} x$$

با توجه به اینکه $۰ < ۰/۳ < ۰/۴ < ۱$، پس نمودار دو تابع $y = \log_{۰/۴} x$ و $y = \log_{۰/۳} x$ طبق شکل زیر هستند. در حل نامعادلهٔ $\log_{۰/۴} x \geq \log_{۰/۳} x$ می‌خواهیم مجموعه طول نقاطی را پیدا کنیم که تابع $y = \log_{۰/۴} x$ بالاتر یا مساوی $y = \log_{۰/۳} x$ باشد و مطابق شکل این فاصله، بازهٔ $[۰,۱)$ است.



دقت داریم که دامنهٔ $\log_{۰/۳} x$ و $\log_{۰/۴} x$ هر دو $x > ۰$ است که اشتراک آن با بازهٔ به‌دست‌آمده همان بازهٔ $[۰,۱)$ خواهد شد.

۷ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۳)

نکته (خواص لگاریتم):

$$\log_a b^n = n \log_a b \ , \ \log_a bc = \log_a b + \log_a c \ , \ \log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$$

ابتدا دو عبارت داده‌شده را با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ساده می‌کنیم:

$$X = \log_{a^۲ b} a \Rightarrow \log_a a^۲ b = \frac{۱}{X} \Rightarrow ۲\log_a a + \log_a b = \frac{۱}{X} \Rightarrow \log_a b = \frac{۱}{X} - ۲$$

$$Y = \log_{ab^۲} b \Rightarrow \log_b ab^۲ = \frac{۱}{Y} \Rightarrow \log_b a + ۲\log_b b = \frac{۱}{Y} \Rightarrow \log_b a = \frac{۱}{Y} - ۲$$

می‌دانیم $\log_b a \times \log_a b = ۱$، پس:

$$(\frac{۱}{X} - ۲)(\frac{۱}{Y} - ۲) = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{XY} - ۲(\frac{۱}{X} + \frac{۱}{Y}) + ۴ = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{XY} - ۲(\frac{X+Y}{XY}) + ۳ = ۰$$

با توجه به اینکه $XY = ۳$، داریم:

$$\frac{۱}{۳} - \frac{۲(X+Y)}{۳} + ۳ = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲(X+Y) + ۹ = ۰ \Rightarrow ۲(X+Y) = ۱۰ \Rightarrow X + Y = ۵$$

تست و پاسخ ۸

نمودار دو تابع $y=۹^x-۱$ و $y=۴\times۳^x-۴$، در نقاط **A** و **B** متقاطع هستند. طول پاره‌خط **AB** کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۹}$ ۲) $\sqrt{۵۳}$ ۳) $\sqrt{۶۵}$ ۴) $\sqrt{۶۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته از فصل توابع نمایی و لگاریتمی معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که جزء مباحث سادهٔ کنکور است؛ پس حتماً روی آن حساب ویژه‌ای باز کنید.

گام اول: برای یافتن نقاط A و B، داریم:

$$۹^x-۱=۴\times۳^x-۴ \Rightarrow (۳^x)^۲-۴\times۳^x+۳=۰ \quad (*)$$

گام دوم: از تغییر متغیر $t=۳^x$ استفاده می‌کنیم تا معادلهٔ $(*)$ را حل کنیم:

$$t^۲-۴t+۳=۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱=۳^x \Rightarrow x=۰ \\ t=۳=۳^x \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

گام سوم: فرض می‌کنیم $x_A=۰$ و $x_B=۱$ باشد، عرض این نقاط را می‌یابیم:

$$y_A=۹^۰-۱=۰ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$$

$$y_B=۹^۱-۱=۸ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۱\\۸\end{matrix}\right.$$

گام چهارم: طول پاره‌خط AB برابر می‌شود با:

$$AB=\sqrt{۱^۱+۸^۲}=\sqrt{۶۵}$$

فرض کنیم $f(x)=\log_2 4x$ باشد. در این صورت نمودار تابع $y=2f(\frac{2}{x})$ بر کدام تابع منطبق است؟

۱) $10-2f(x)$ ۲) $8-3f(x)$ ۳) $6-f(x)$ ۴) $8+2f(x)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

طریقهٔ حل پیشنهادی $f(\frac{2}{x})$ را با جای‌گذاری به دست آورید.

درس‌نامه ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y=x$	رابطه‌های لگاریتمی را می‌توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y=\log_b a \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{cases}$	برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می‌گیریم.
$\log_b 1=0 \ , \ \log_a a=1$	لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر و لگاریتم هر عدد در پایهٔ خودش برابر یک است.
$\log_b a^n=n\log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می‌رود. $(a>0)$
$\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\log_b a$	توان پایهٔ لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می‌رود.
$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه
$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می‌شود، مثلاً $\log_2 3$ و $\log_3 2$ معکوس هم هستند.

گام اول: ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$$

گام دوم: حالا در تابع y داریم:

$$y=2f(\frac{2}{x})=2(2+\log_2 \frac{2}{x})=2(2+\log_2 2-\log_2 x)=2(2+1-\log_2 x)=6-2\log_2 x \quad (*)$$

گام سوم: با توجه به گام اول، $\log_2 x=f(x)-2$ است. با جای‌گذاری در $(*)$، داریم:

$$y=6-2(f(x)-2)=6-2f(x)+4=10-2f(x)$$

تست و پاسخ ۱۰

اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\log_۲(۳\times ۲^x - ۴) = ۲x - ۱$ با یکدیگر چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در حل معادلات لگاریتمی، تا حد امکان از خواص لگاریتم استفاده کنید تا معادله به ساده‌ترین شکل ممکن برسد.

گام اول: برای حل معادله، از خاصیت $\log_b a = c \Rightarrow a = b^c$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\log_۲(۳\times ۲^x - ۴) = ۲x - ۱ \Rightarrow ۳\times ۲^x - ۴ = ۲^{۲x-۱} = \frac{۲^{۲x}}{۲} \Rightarrow ۶\times ۲^x - ۸ = ۲^{۲x} \quad (*)$$

گام دوم: برای حل معادلهٔ (*) از تغییر متغیر $۲^x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$۶t - ۸ = t^۲ \Rightarrow t^۲ - ۶t + ۸ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ = ۲^x \\ \text{یا} \\ t = ۴ = ۲^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ \text{یا} \\ x = ۲ \end{cases}$$

گام سوم: اختلاف ریشه‌ها برابر با ۱ است.

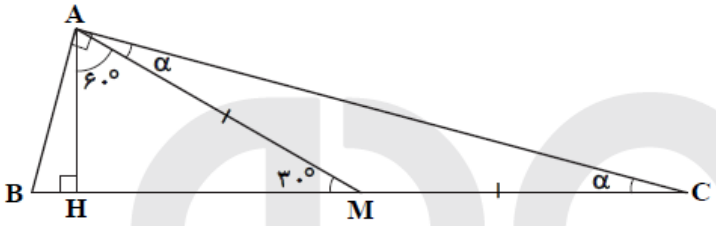
۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۳)

راه‌حل اول:

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حادهٔ ۱۵° دارد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

با در نظر گرفتن شکل مقابل، در مثلث AHM داریم:



$$\hat{HAM} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{M} = ۳۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. پس $AM = MC$ و در نتیجه $\hat{MAC} = \hat{ACM} = \alpha$. از طرفی زاویهٔ $\hat{AMH}$، زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ است:

$$\text{زاویهٔ خارجی } \hat{AMH} = \hat{\alpha} + \hat{\alpha} = ۲\hat{\alpha}$$

$$۳۰^\circ = ۲\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = ۱۵^\circ$$

طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$AH = \frac{۱}{۴}BC = \frac{۱}{۴}\times ۸ = ۲$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}\times ۲ \times ۸ = ۸$$

راه‌حل دوم:

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\hat{A} = ۹۰^\circ$، زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر برابر است با: $|\hat{B} - \hat{C}|$

طبق نکتهٔ فوق داریم:

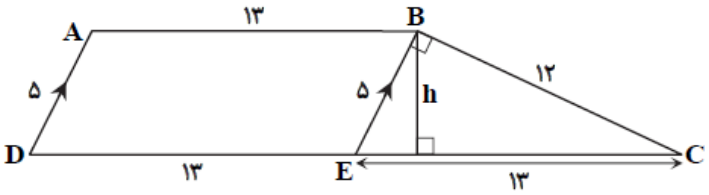
$$\begin{cases} \hat{B} - \hat{C} = ۶۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = ۷۵^\circ \ , \ \hat{C} = ۱۵^\circ$$

ادامهٔ راه‌حل مانند راه‌حل اول است.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۲ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۳)

از نقطهٔ **B** خطی موازی ساق **AD** رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ **DC** را در **E** قطع کند. در شکل، **ABED** یک متوازی‌الاضلاع است:



$$\begin{cases} DE = AB = ۱۳ \\ AD = BE = ۵ \end{cases}$$

در مثلث **BEC** داریم:

$$۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ \Rightarrow BE^۲ + BC^۲ = EC^۲$$

پس مثلث **BEC** قائم‌الزاویه است. در این مثلث ارتفاع وارد بر وتر را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{\triangle BEC} = \frac{۱}{۲}h \times ۱۳ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ \Rightarrow h = \frac{۶۰}{۱۳}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}h(AB + DC) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۶۰}{۱۳} \times (۱۳ + ۲۶) = ۹۰$$

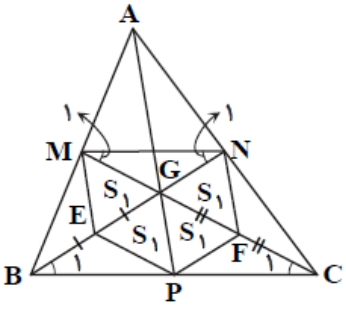
۱۳ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

نکته (قضیهٔ میان‌خط): اگر در مثلثی خطی وسط‌های دو ضلع را به هم وصل کند، پاره‌خط حاصل موازی ضلع سوم و برابر با نصف آن است.

نکته: اگر همهٔ میانه‌های یک مثلث را رسم کنیم، شش مثلث هم‌مساحت تشکیل می‌شود.

طبق نکات فوق داریم:



$$S_{\triangle GNC} = S_{\triangle GPC} = S_{\triangle GPB} = S_{\triangle GMB} = \frac{۱}{۶}S_{\triangle ABC}$$

در هریک از این مثلث‌ها، مطابق شکل یک میانه رسم شده است، پس:

$$S_{\triangle GNF} = S_۱ = \frac{۱}{۲}S_{\triangle GNC} \Rightarrow S_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶}S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۱۲}S_{\triangle ABC}$$

به طریق مشابه داریم:

$$S_{\triangle GFP} = S_{\triangle GEP} = S_{\triangle GEM} = S_۱$$

طبق قضیهٔ میان‌خط در مثلث **ABC** داریم:

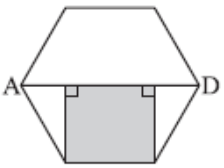
$$MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{C}_۱ \ , \ \hat{N}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow \overset{\triangle}{MGN} \sim \overset{\triangle}{GBC}$$

$$\frac{S_{\triangle MGN}}{S_{\triangle GBC}} = (\frac{MN}{BC})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\triangle MGN} = \frac{۱}{۴}S_{\triangle GBC} \ , \ S_{\triangle GBC} = \frac{۱}{۳}S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MGN} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳}S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۱۲}S_{\triangle ABC}$$

$$S_{MNFPE} = S_{\triangle MGN} + ۴S_۱ = (\frac{۱}{۱۲} + ۴ \times \frac{۱}{۱۲})S_{\triangle ABC} = \frac{۵}{۱۲}S_{\triangle ABC}$$

مطابق شکل، یک شش‌ضلعی منتظم رسم شده است. اگر طول قطر AD برابر با x باشد، مساحت چهارضلعی سایه‌خورده، چند برابر x^2 است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

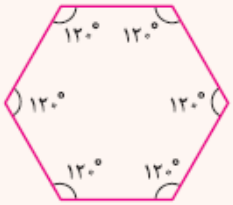
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۲۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره ترکیب ۶ ضلعی منتظم و زاویه‌های خاص در مثلث قائم‌الزاویه بسیار پرتکرار است. شبیه این سؤال را در کنکور ۱۴۰۱ داشتیم.

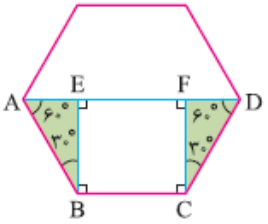
درس‌نامه

۱) مطابق شکل مقابل، هر زاویهٔ داخلی ۶ ضلعی منتظم ۱۲۰° است.



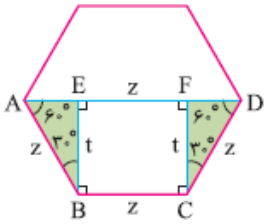
۲) در مثلث‌های قائم‌الزاویه که زاویه‌های خاص مثل ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° دارند، طول ضلع رو به این زوایا برحسب وتر مطابق جدول زیر به راحتی به دست می‌آید:

زاویه	طول ضلع رو به زاویه
۳۰°	ضلع رو به این زاویه نصف وتر است.
۴۵°	ضلع رو به این زاویه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است.
۶۰°	ضلع رو به این زاویه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است.



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل شکل مسئله)**: طبق قسمت (۱) درس‌نامه می‌دانیم هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است؛ پس $\hat{B}=\hat{C}=۱۲۰^\circ$ و در نتیجه $A\hat{B}E=D\hat{C}F=۱۲۰^\circ-۹۰^\circ=۳۰^\circ$ است. همان‌طور که می‌بینید یکی از زاویه‌های مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رنگی ۳۰° شد، پس زاویهٔ دیگرشان ۶۰° خواهد بود.

گام دوم (محاسبهٔ طول AE و FD برحسب اضلاع مستطیل): مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم طول و عرض مستطیل z و t باشند، در این صورت در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رنگی طبق قسمت (۲) درس‌نامه داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AEB}: AE=\frac{۱}{۲}z\,,\ t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}z \\ \overset{\Delta}{FCD}: FD=\frac{۱}{۲}z \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سؤال می‌گوید فرض کنید $AD=x$، به من بگویید مساحت مستطیل، یعنی S_{BEFC} چند برابر $\frac{x^۲}{AD^۲}$ است. این یعنی نسبت $\frac{S_{BEFC}}{AD^۲}$ را به دست بیاورید؛ این نسبت برابر است با:

$$\frac{S_{BEFC}}{AD^۲}=\frac{BE\times BC}{(AE+EF+FD)^۲}=\frac{z\ \overset{\frac{\sqrt{۳}}{۲}z}{\uparrow t}}{(\frac{۱}{۲}z+z+\frac{۱}{۲}z)^۲}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}z^۲}{(۲z)^۲}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}z^۲}{۴z^۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

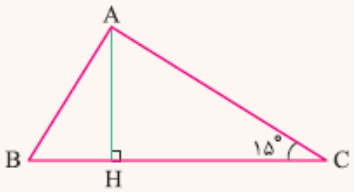
در مثلث ABC که $\hat{B} = ۵\hat{C}$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$، نقطهٔ M وسط BC و نقطهٔ G محل همرسی میانه‌هاست. اگر از نقطهٔ G، عمود GK را بر BC وارد کنیم، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث GMK کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

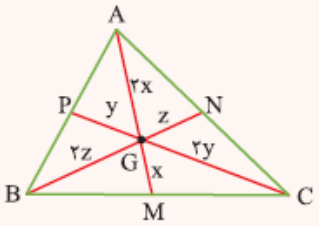
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

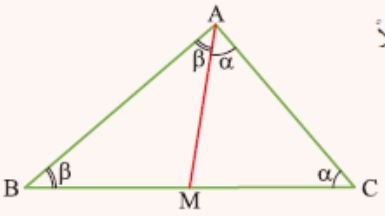
۱) در مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۱۵°، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است؛ یعنی در شکل مقابل می‌توانیم بگوییم $AH = \frac{۱}{۴}BC$.



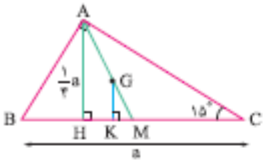
۲) میانه‌های هر مثلث مطابق شکل مقابل در نقطه‌ای به نام مرکز ثقل همرس‌اند. میانه‌ها همیشه به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند، ببینید:



۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه، با کشیدن میانهٔ وارد بر وتر، دو مثلث متساوی‌الساقین درست می‌شود. مثلاً در شکل مقابل اگر AM میانه باشد، مثلث‌های AMC و AMB متساوی‌الساقین هستند.



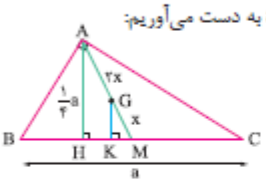
پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ طول ارتفاع مثلث ABC)**، شکل مسئله به صورت زیر است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جمع زاویه‌های B و C باید ۹۰° باشد. از طرفی به گفتهٔ سؤال $\hat{B}=۵\hat{C}$ است، بنابراین:



$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=۵\hat{C}} ۵\hat{C}+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow ۶\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

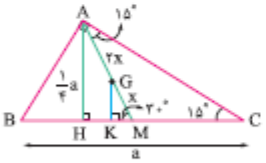
پس مثلث ABC یک زاویهٔ ۱۵° دارد، بنابراین طبق مورد (۱) درس‌نامه اگر $BC=a$ باشد، $AH=\frac{۱}{۴}a$ می‌شود.

گام دوم (محاسبهٔ طول ارتفاع مثلث GMK)، نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، این نقطه، میانه را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کند. حالا با نوشتن یک تالس جزء‌به‌کل در مثلث AHM، طول ارتفاع GK را برحسب a به دست می‌آوریم:



$$\frac{MG}{MA}=\frac{GK}{AH} \Rightarrow \frac{x}{x+۲x}=\frac{GK}{\frac{۱}{۴}a} \Rightarrow \frac{x}{۳x}=\frac{GK}{\frac{۱}{۴}a} \Rightarrow GK=\frac{۱}{۱۲}a$$

گام سوم (محاسبهٔ طول قاعدهٔ MK)، همان‌طور که می‌بینید، AM میانهٔ وارد بر وتر است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم مثلث AMC متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $M\hat{A}C=A\hat{C}M=۱۵^\circ$. حالا خوب به زاویهٔ $A\hat{M}H$ نگاه کنید. این زاویه، زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین AMC است پس برابر می‌شود با جمع زاویه‌های $M\hat{A}C$ و $M\hat{C}A$:



$$G\hat{M}K=M\hat{A}C+M\hat{C}A=۱۵^\circ+۱۵^\circ=۳۰^\circ$$

در آخر به مثلث GMK توجه کنید. در این مثلث ضلع رو به زاویهٔ ۳۰° را داریم و ضلع مجاورش را می‌خواهیم؛ پس تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{KG}{KM} \xrightarrow[KG=\frac{۱}{۱۲}a]{\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\text{ یا }\frac{۱}{\sqrt{۳}}} \frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\frac{۱}{۱۲}a}{MK} \Rightarrow MK=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}a$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ مسئله)، حالا که ارتفاع‌ها و قاعده‌های مثلث‌های GMK و ABC را برحسب a داریم، می‌توانیم نسبت مساحت‌هایشان را حساب کنیم:

$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{S_{G\hat{M}K}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BC}{\frac{۱}{۲}GK\times KM}=\frac{(\frac{۱}{۴}a)(a)}{(\frac{۱}{۱۲}a)(\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}a)}=\frac{\frac{a^۲}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۱۲\times ۱۲}}=\frac{۱۲\times ۱۲}{۴\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\times ۱۲\sqrt{۳}}{۱۲}=۱۲\sqrt{۳}$$

دو خط d و d' واقع در صفحهٔ P در نقطهٔ O متقاطع‌اند و خط L با صفحهٔ P متقاطع است. چند خط می‌توان رسم کرد که هر سه خط L، d و d' را قطع کند؟

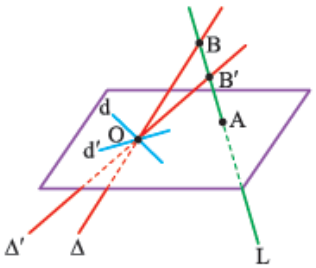
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره **توصیهٔ اصلی در مورد سؤال‌های «خط، نقطه و صفحه» این است که گزاره‌های مهم آن را که در کتاب درسی و کتاب تستتان آمده، بلد باشید و تا می‌توانید از رسم شکل به عنوان مثال نقض برای اثبات نادرستی بعضی گزاره‌ها استفاده کنید.**

خودت حل کنی بهتره در این سؤالات حتماً ابتدا شکل صورت سؤال را رسم کنید.

پاسخ تشریحی خطوط d و d' در صفحهٔ P و در نقطهٔ O متقاطع‌اند. از طرفی خط L با صفحهٔ P متقاطع است، یعنی فقط در یک نقطه، صفحهٔ P را قطع می‌کند. شکل مقابل را ببینید.



می‌دانیم از هر دو نقطه، چه در صفحه و چه در فضا فقط یک خط می‌گذرد، پس اگر هر نقطه مانند B را روی خط L در نظر گرفته و به نقطهٔ O وصل کنیم، آن‌گاه بی‌شمار خط مانند Δ وجود دارد که با هر سه خط L، d و d' متقاطع است.

تست و پاسخ ۱۷

با کنار هم قراردادن n^3 مکعب به طول یال واحد، یک مکعب به طول یال n ساخته و تمام وجه‌های آن را رنگ کرده‌ایم، به طوری که تعداد مکعب‌های واحدی که به ترتیب یک، دو و سه وجه رنگی دارند برابر با a، b و c است. اگر $b = 6c$، آن‌گاه حاصل $\frac{a}{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵۰}{۷}$

۲) ۱۰/۸

۳) ۱۶

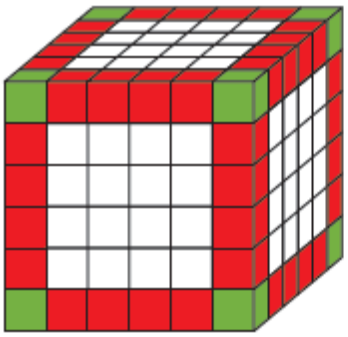
۴) ۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره این سؤال برگرفته از تمرین ۳ صفحهٔ ۹۰ کتاب درسی هندسه (۱) است و همان‌طور که می‌دانیم در هندسهٔ پایه، تمرین‌های کتاب درسی بسیار مهم است. توجه کنید که در این مدل سؤال‌ها تنها با تجسم حل می‌شود و تکنیک خاصی برای حل آن‌ها وجود ندارد؛ بهترین کار برای کسب مهارت در حل چنین سؤال‌هایی این است که مشابه آن‌ها را قبلاً تمرین کرده باشید.

خودت حل کنی بهتره شکل مکعب بزرگ را بکشید، متوجه می‌شوید کدام مکعب‌های کوچک یک، دو یا سه وجه رنگ‌شده دارند.

پاسخ تشریحی مکعب بزرگ به ابعاد $n \times n \times n$ است. می‌دانیم با توجه به شکل زیر، در هر یال از مکعب $n-2$ تا مکعب کوچک وجود دارد که ۲ وجه رنگ‌شده دارند (مکعب‌های قرمز) و فقط مکعب‌های کوچک گوشه‌ای هستند که سه وجه رنگ‌شده دارند (مکعب‌های سبز)، پس: $b = ۱۲(n-۲)$ و $c = ۸$؛ بنابراین با توجه به فرض مسئله داریم:



$$b = ۶c \Rightarrow ۱۲(n-۲) = ۶ \times ۸ \Rightarrow n = ۶$$

پس مکعب به صورت $۶ \times ۶ \times ۶$ است (مثل شکل داده‌شده) و اگر دقت کنید، می‌بینید که در هر وجه مکعب بزرگ $(n-۲)(n-۲) = ۴ \times ۴ = ۱۶$ مکعب کوچک وجود دارد که یک وجه رنگ‌شده دارد و از آن‌جایی که هر مکعب ۶ وجه دارد؛ پس:

$$a = ۶ \times ۱۶ = ۹۶$$

در نتیجه $\frac{a}{n}$ برابر است با:

$$\frac{a}{n} = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶$$

تست و پاسخ ۱۸

صفحه‌ای از محور یک مخروط قائم می‌گذرد و مقطعش با مخروط، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به محیط ۳۶ است. حجم این مخروط چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) ۳۶π

۲) ۵۴π

۳) ۷۲π

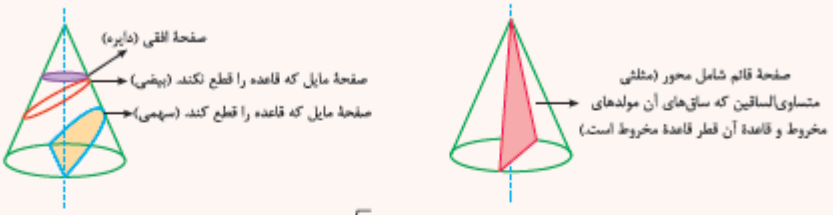
۴) ۹۶π

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره برش، از موضوعات مهم کتاب درسی است. در نظام قدیم که کتاب به صورت مستقیم به برش نپرداخته بود، بارها سؤالاتی از برش در کنکور داشتیم. حالا که کتاب درسی بخشی را به مبحث برش اختصاص داده، طبیعتاً اهمیت آن بیشتر هم شده است.

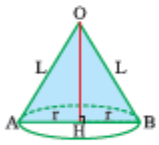
درس‌نامه

۱) سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی، مایل و قائم به صورت زیر است.



۲) طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر است با $h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

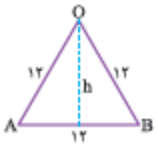
پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل اطلاعات صورت سؤال):** سؤال گفته صفحهٔ قائمی که مخروط را قطع کرده است، یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد کرده، یعنی طبق درس‌نامه باید مولدهای مخروط با قطر قاعدهٔ آن برابر باشد؛ پس $L=۲r$. با توجه به این موضوع و این‌که محیط مثلث ایجادشده برابر ۳۶ است، داریم:



$$L+L+۲r=۳۶ \xrightarrow{۲r=L} ۳L=۳۶ \Rightarrow \begin{cases} L=۱۲ \\ r=۶ \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ حجم مخروط): حالا مثلث متساوی‌الاضلاع OAB را جداگانه ببینید:

طبق شکل روبه‌رو، ارتفاع مخروط همان ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع OAB است که برابر است با:



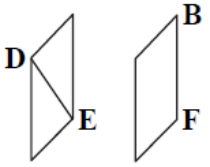
$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۲=۶\sqrt{۳}$$

در نتیجه حجم مخروط برابر است با:

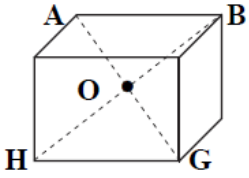
$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi\times ۶^{۲}\times ۶\sqrt{۳}=۷۲\pi\sqrt{۳}$$

۱۹ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: در فضا دو خط متنافرند، اگر هیچ صفحه‌ای شامل هر دو خط وجود نداشته باشد.



دو خط BF و DE در دو صفحهٔ موازی قرار دارند، پس نمی‌توانند با هم متقاطع باشند. این دو خط موازی نیستند، چون شرط لازم برای موازی بودن در یک صفحه بودن آن دو خط است. در واقع هیچ صفحه‌ای شامل این دو خط وجود ندارد، پس این دو خط متنافرند.

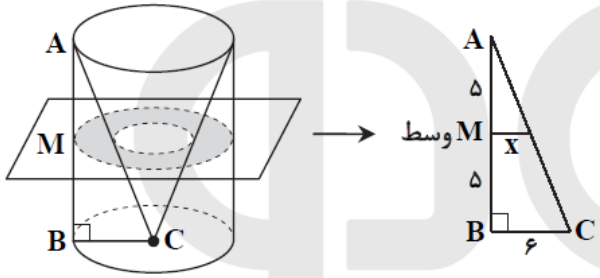


یک مکعب دارای ۴ قطر می‌باشد که در نقطهٔ O (مرکز مکعب) همرس هستند. مطابق شکل AG و BH دو تا از قطرهای این مکعب هستند، پس در مرکز مکعب متقاطع هستند.

۲۰ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

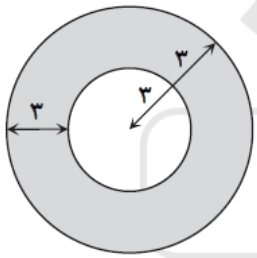
طبق شکل، اگر صفحه‌ای این جسم را قطع کند، سطح مقطع آن مساحت بین دو دایرهٔ هم‌مرکز است.

دایرهٔ بزرگ‌تر مثل قاعدهٔ استوانه شعاع ۶ دارد، ولی شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را باید به‌دست آوریم.



در مثلث ACB طبق فرض، نقطهٔ M وسط ارتفاع AB قرار دارد. پس طبق قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{x}{۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۳$$



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{دایرهٔ بزرگ}} - S_{\text{دایرهٔ کوچک}} = \pi \times ۶^۲ - \pi \times ۳^۲ = ۲۷\pi$$

۲۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: هیچ گواه تجربی بر وجود تک‌قطبی مغناطیسی وجود ندارد. قطب‌های مغناطیسی همواره به‌صورت زوج ظاهر می‌شوند.

ب: میدان مغناطیسی، کمیتی فرعی و برداری است که یکای آن در SI، تسلا است.

ج: بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضای پیرامون یک آهنربا در جهتی است که وقتی عقربهٔ مغناطیسی در آن نقطه قرار می‌گیرد، قطب N عقربه آن جهت را نشان می‌دهد.

د: خطوط میدان مغناطیسی، خطوط بسته‌ای هستند.

هـ: خطوط میدان مغناطیسی در خارج از آهنربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی، کمیتی برداری است که یکای آن در SI برابر تسلا است. معمولاً میدان‌های مغناطیسی را با خطوط میدان نمایش می‌دهند که خوب است نکات زیر را در مورد آن‌ها بدانید.

۱ـ خطوط میدان در خارج از آهنربا از قطب N خارج شده و به قطب S وارد می‌شوند و در داخل آهنربا از قطب S به سمت قطب N هستند.

۲ـ با توجه به این‌که قطب‌های N و S همواره همراه هم هستند و تک‌قطبی مغناطیسی نداریم، خطوط میدان مغناطیسی همواره خطوط بسته‌ای می‌باشند.

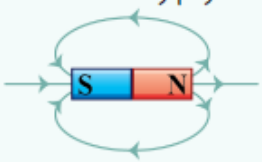
۳ـ تراکم خطوط میدان مغناطیسی متناسب با شدت میدان است. هرچه میدان مغناطیسی، قوی‌تر باشد، خطوط میدان مغناطیسی، متراکم‌تر هستند.

۴ـ خطوط میدان مغناطیسی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از هر نقطه یک خط میدان می‌تواند بگذرد.

۵ـ جهت میدان مغناطیسی در هر نقطه مماس بر خطوط میدان و در جهت آن‌هاست، بنابراین عقربه‌های مغناطیسی همواره به گونه‌ای قرار می‌گیرند که با خطوط میدان هم‌راستا باشند و قطب N آن‌ها در جهت میدان باشد.

مثال: خطوط میدان اطراف یک آهنربای میله‌ای را رسم کنید.

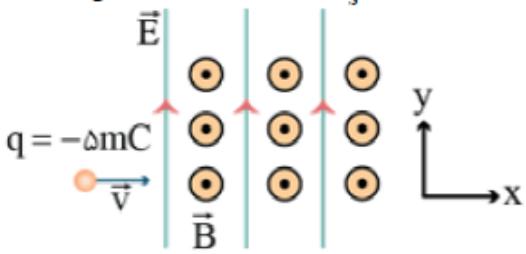
با توجه به نکات فوق، می‌توان شکل زیر را برای خطوط میدان آهنربای میله‌ای در نظر گرفت. دقت کنید که در نزدیکی قطب‌ها، خطوط، متراکم‌تر هستند.



پاسخ تشریحی:

تمامی عبارت‌ها صحیح هستند، بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ صحیح است.

۲۲ در شکل زیر، ذرهٔ بارداری به جرم ۵۰ گرم و بار $-5mC$ وارد میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۲۰۰\frac{N}{C}$ و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $0/1T$ می‌شود. اندازهٔ سرعت ذره چند متر بر ثانیه باشد تا به محض ورود به میدان‌های فوق، شتاب آن $۶\frac{m}{s^2}$ و رو به پایین باشد؟ ($g=۱۰\frac{N}{kg}$، جهت شتاب گرانش $\vec{g}$ رو به پایین و در جهت عکس محور yها است.)



۱) ۲۴۰۰
۲) ۹۶۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینه ۱ (سخت_ محاسباتی_ ۱۱۰۳)

نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ بار دار متحرک در میدان مغناطیسی

اگر ذره‌ای با بار (q) با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند به شرطی که جهت حرکت بار موازی خطوط میدان $\vec{B}$ نباشد، از طرف میدان بر ذره نیرویی وارد می‌شود که به آن نیروی مغناطیسی گفته می‌شود و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$F=|q|vB\sin\theta$ θ : زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$

$\theta=۰^\circ$ یا $۱۸۰^\circ \rightarrow \sin\theta=۰ \rightarrow F=۰$ اگر حرکت ذره موازی خطوط میدان باشد

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

اگر $\theta = ۹۰^\circ \rightarrow \sin\theta = ۱ \rightarrow F = F_{max} = |q|vB$

یکای میدان مغناطیسی طبق روابط فوق در (SI) برابر با $\frac{N}{C.\frac{m}{s}}$ بوده که برابر $\frac{N}{A.m}$ خواهد شد که به آن تسلا گفته می‌شود و با نماد T نشان داده می‌شود. یکای دیگر میدان مغناطیسی برابر گاوس (G) است که داریم:

$۱T = ۱۰^{۴}G$ $\qquad$ $۱G = ۱۰^{-۴}T$

نکته ۱:

میدان مغناطیسی فقط به ذرات باردار متحرک نیرو وارد می‌کند ولی میدان الکتریکی هم به ذرات باردار ساکن و هم به ذرات باردار متحرک نیرو وارد می‌کند.

نکته ۲:

برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم به این صورت که اولاً نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ بر $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است:

$\vec{F} \perp \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{F} \perp \vec{v}$

علاوه بر این قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت نیروی وارد بر بار مثبت به‌صورت زیر است:

شست باز : $\vec{F}$ $\qquad$ از کف دست خارج می‌شود : $\vec{B}$ $\qquad$ چهار انگشت دست راست در حالت باز : $\vec{v}$

نکته ۳:

برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذره باردار منفی دو روش وجود دارد:

روش ۱: قاعدهٔ دست راست را با دست چپ اجرا کنیم.

روش ۲: قاعدهٔ دست راست را به کار برده و در انتها جهت نیروی به دست‌آمده را معکوس می‌کنیم.

کنکور سراسری تجربی خارج ۹۸:

ذره‌ای به جرم $۵g$ که دارای بار $-۵۰\mu C$ است، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت با سرعت $۲/۵\times۱۰^{۳}\frac{m}{s}$ در راستای افقی از جنوب به شمال پرتاب می‌شود. جهت و اندازهٔ میدان کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد تا نیروی مغناطیسی، نیروی وزن را خنثی کند و ذره به مسیر مستقیم حرکت خود ادامه دهد؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۰/۰۴ تسلا در راستای افقی از شرق به غرب

۲) ۰/۰۴ تسلا در راستای افقی از غرب به شرق

۳) ۰/۴ تسلا در راستای افقی از شرق به غرب

۴) ۰/۴ تسلا در راستای افقی از غرب به شرق

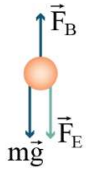
پاسخ: گزینهٔ ۴

چون بار ذره منفی است، طبق قاعدهٔ دست‌چپ، چهار انگشت دست‌چپ در جهت جنوب به شمال و F (انگشت شست) رو به بالا باید باشد تا mg را خنثی کند، در این صورت $\vec{B}$ از غرب به شرق خواهد بود و داریم:

$$|q|vB = mg \rightarrow ۵۰\times۱۰^{-۶}\times۲/۵\times۱۰^{۳}\times B = ۵\times۱۰^{-۳}\times۱۰ \rightarrow B = ۰/۴(T)$$

پاسخ تشریحی:

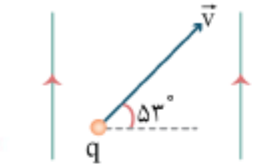
به ذره سه نیروی $\overrightarrow{mg}$ رو به پایین، $\vec{F}_E$ رو به پایین و $\vec{F}_B$ وارد می‌شود. برای اینکه شتاب حرکت ذره $۶\frac{m}{s^{۲}}$ رو به پایین شود، باید $\vec{F}_B$ رو به بالا باشد، در نتیجه داریم:



$$mg + F_E - F_B = ma$$
$$\rightarrow mg + |q|E - |q|vB = ma \rightarrow |q|(vB - E) = m(g - a)$$
$$\rightarrow ۵\times۱۰^{-۳}\times(۰/۱v - ۲۰۰) = ۵۰\times۱۰^{-۳}\times(۱۰ - ۶)$$
$$\rightarrow ۰/۱v - ۲۰۰ = ۴۰ \rightarrow ۰/۱v = ۲۴۰ \rightarrow v = ۲۴۰۰\frac{m}{s}$$

www.biomaze.ir

۲۳ در شکل زیر، ذرهٔ بارداری با بار $q=5mC$ در میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های راست حامل جریان I_1 و I_2 با سرعت $2\times10^4\ \frac{m}{s}$ در جهت نشان داده‌شده در حال حرکت است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های حامل جریان در مکان ذره برابر $B_1=0/6T$ و $B_2=0/2T$ باشد، نیروی وارد بر ذره باردار در این لحظه چند نیوتون و در چه جهتی است؟



۱) ۰/۴۰ ↖

۲) ۰/۴۰ ↘

۳) ۰/۳۲ ↖

۴) ۰/۳۲ ↘

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی

اورستد ضمن انجام آزمایش‌های الکتریسیته مشاهده کرد که عقربهٔ مغناطیسی در کنار سیم حامل جریان الکتریکی، منحرف می‌شود و با انجام آزمایش‌های بیشتر کشف کرد که عبور جریان الکتریکی از یک سیم رسانا، در اطراف آن یک میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد.

نکته:

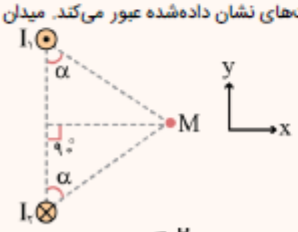
خطوط میدان مغناطیسی حاصل از سیم بلند مستقیم حامل جریان به‌صورت دایره‌های هم‌مرکز در اطراف سیم حامل جریان هستند. جهت خط‌های میدان مغناطیسی سیم راست حامل جریان را می‌توان به کمک عقربهٔ مغناطیسی تعیین کرد. علاوه بر آن با استفاده از قاعدهٔ دست راست نیز می‌توان این جهت را تعیین کرد.

قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت $\vec{B}$ اطراف سیم راست حامل جریان:

سیم را در دست راست خود می‌گیریم به طوری که انگشت شست در جهت جریان الکتریکی باشد. جهت خم شدن چهار انگشت دست، خطوط میدان مغناطیسی را در اطراف سیم نشان می‌دهد.

کنکور سراسری ریاضی ۹۹:

شکل زیر، مقطع دو سیم بلند و موازی را نشان می‌دهد که بر صفحه کاغذ عمودند و از آن‌ها جریان‌های برابر و در جهت‌های نشان داده‌شده عبور می‌کند. میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M در کدام جهت است؟



۱) در جهت محور x

۲) در جهت محور y

۳) خلاف جهت محور x

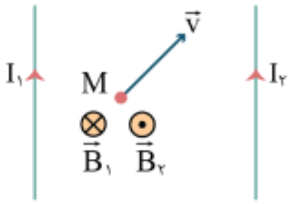
۴) خلاف جهت محور y

پاسخ: گزینه ۱

طبق قانون دست راست برای میدان حاصل از سیم راست حامل جریان در یک نقطه اطراف سیم میدان حاصل از سیم‌ها در نقطهٔ M به شکل

می‌باشد که برآیند آن‌ها در جهت محور x خواهد بود.

طبق قاعدهٔ دست راست برای میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان، میدان حاصل از سیم‌های حامل جریان I_1 و I_2 در نقطهٔ M به ترتیب درون‌سو و برون‌سو هستند و داریم:

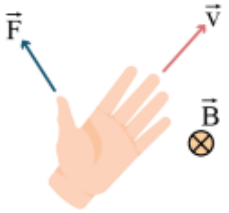


$$B_M = B_1 - B_2 = 0/6 - 0/2 = 0/4(T)\otimes$$

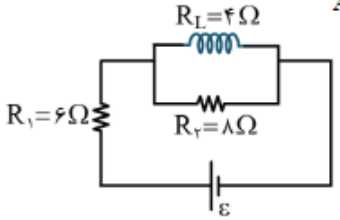
$$F = qvB\sin\theta$$

$$F = 5\times10^{-3}\times2\times10^{4}\times0/4\times1 \rightarrow F = 40(N)$$

نکتهٔ مهم اینکه زاویهٔ 53° در شکل، زاویهٔ بین جهت حرکت ذرهٔ باردار و راستای افقی است و زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برابر 90° می‌باشد. همچنین طبق قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی، جهت نیرو ↖ می‌باشد.



۲۴ **در شکل زیر، سیملوله‌ای به طول $50cm$ که دارای ۲۰۰ حلقه است، درون مداری قرار دارد. اگر پس از گذشت زمان طولانی، میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیملوله حامل جریان برابر $9/6\times10^{-4}T$ باشد، توان مصرفی در مقاومت R_1 چند وات خواهد بود؟ ($\mu_0 = 12\times10^{-7}\frac{T.m}{A}$)**



۱) ۵۴

۲) ۲۱۶

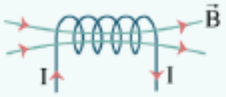
۳) ۱۰۸

۴) ۱۳/۵

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی و ترکیبی ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی حاصل از سیملولهٔ حامل جریان

پسیملوله، سیم درازی است که به صورت مارپیچی بلند، پیچیده شده است. با عبور جریان الکتریکی از سیملوله در فضای اطراف آن میدان مغناطیسی به وجود می‌آید.



خطوط میدان داخل سیملوله بسیار متراکم‌تر از خط‌های میدان در خارج آن است و این نشان‌دهندهٔ بزرگ‌تر بودن میدان در داخل سیملوله است. علاوه بر این خط‌های میدان در داخل سیملوله به ویژه در نقطه‌های نسبتاً دور از لبه‌های آن تقریباً موازی و هم‌فاصله‌اند و این نشانگر یکنواخت بودن میدان مغناطیسی درون سیملوله است. اگر قطر حلقه‌های سیملوله در مقایسه با طول آن بسیار کوچک و حلقه‌های آن خیلی به هم نزدیک باشند به این سیملوله، سیملولهٔ آرمانی گفته می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی داخل سیملوله آرمانی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

L: طول سیملوله N: تعداد حلقه‌ها μ_0: تراوایی مغناطیسی خلأ $=4\pi\times10^{-7}\frac{T.m}{A}$

کنکور سراسری تجربی ۹۸:

سیملوله‌ای به طول ۶۰ سانتی‌متر، دارای ۲۰۰ حلقه است و از آن جریان ۵A عبور می‌کند. میدان مغناطیسی درون سیملوله چند تسلا است؟ $(\mu_0=12\times10^{-7}\frac{T.m}{A})$

۱) 2×10^{-1} ۲) 2×10^{-3} ۳) $1/2\times10^{-1}$ ۴) $1/2\times10^{-3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

$$B=\mu_0\frac{NI}{\ell}\rightarrow B=12\times10^{-7}\times\frac{200\times5}{0/6}\rightarrow B=2\times10^{-3}T$$

پاسخ تشریحی:

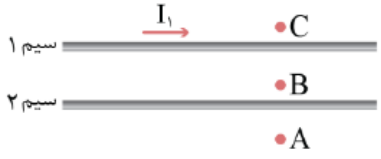
اگر جریان عبوری از سیملوله را I در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$B=\mu_0\frac{NI}{\ell}\rightarrow 9/6\times10^{-4}=12\times10^{-7}\times\frac{200\times I}{0/5}\rightarrow I=2A$$

چون سیملوله با مقاومت R_2 موازی بسته شده است، می‌توانیم بنویسیم:

$$R_{LI}=R_2I_2\rightarrow 4\times2=8\times I_2\rightarrow I_2=1A$$
$$I_1=I+I_2=2+1\rightarrow I_1=3A$$
$$P_1=R_1I_1^2=6\times3^2\rightarrow P_1=54W$$

۲۵ شکل زیر، دو سیم موازی و بلند حامل جریان را نشان می‌دهد. اگر میدان مغناطیسی برایند حاصل از این سیم‌ها در نقطهٔ A صفر باشد، جهت میدان مغناطیسی برایند در نقاط B و C به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟



۱) $\otimes$ ، $\otimes$

۲) $\odot$ ، $\otimes$

۳) $\otimes$ ، $\odot$

۴) $\odot$ ، $\odot$

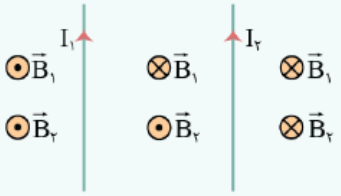
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی برایند دو سیم راست موازی

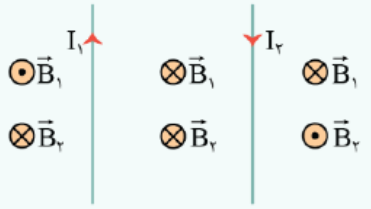
اگر دو سیم راست حامل جریان الکتریکی در نزدیکی هم قرار بگیرند، دو حالت زیر امکان‌پذیر است که هر یک از آن‌ها را جداگانه بررسی خواهیم کرد.

حالت اول: جریان سیم‌ها هم‌جهت باشد.

در این حالت جهت میدان سیم‌ها مطابق شکل مقابل است. همان‌طور که می‌بینید، جهت میدان سیم‌ها در فاصلهٔ بین آن‌ها مخالف هم است و در نتیجه میدان مغناطیسی در فاصلهٔ بین دو سیم و نزدیک به سیم با جریان کمتر می‌تواند صفر باشد. دقت کنید که اگر جریان الکتریکی سیم‌ها برابر باشد، میدان مغناطیسی برایند دقیقاً در وسط فاصلهٔ آن‌ها صفر خواهد شد.



حالت دوم: جریان سیم‌ها در خلاف جهت یکدیگر باشد

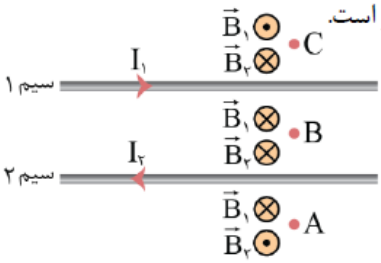


در این حالت جهت میدان سیم‌ها مطابق شکل مقابل است. همان‌طور که می‌بینید، جهت میدان سیم‌ها در خارج از فاصلهٔ بین آن‌ها مخالف هم است و در نتیجه میدان مغناطیسی در خارج از فاصلهٔ بین دو سیم و نزدیک به سیم با جریان کمتر می‌تواند صفر باشد.

دقت کنید که اگر جریان الکتریکی سیم‌ها برابر باشد، میدان مغناطیسی خالص در هیچ نقطه‌ای صفر نخواهد شد.

پاسخ تشریحی:

میدان مغناطیسی سیم (۱) در نقطهٔ A درون‌سو است، بنابراین برای آن که میدان برایند در این نقطه صفر شود، میدان سیم (۲) باید برون‌سو باشد و در نتیجه طبق قاعدهٔ دست راست جریان سیم (۲) به سمت چپ است. جهت میدان سیم‌ها در نقاط B و C مطابق شکل زیر است.



در نقطهٔ B، میدان هر دو سیم درون‌سو است و در نتیجه میدان مغناطیسی برایند نیز درون‌سو خواهد بود. در نقطهٔ C، میدان سیم‌ها خلاف جهت هم است ولی چون جریان سیم (۱) بزرگ‌تر است (چرا؟) و فاصلهٔ نقطهٔ C تا سیم (۱) کمتر است، میدان حاصل از سیم (۱) بزرگ‌تر خواهد بود و میدان مغناطیسی برایند در جهت برون‌سو خواهد بود.

۲۶ **چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟**

الف: اتم‌های مواد پارامغناطیسی خاصیت مغناطیسی ندارند به همین دلیل جذب آهربا نمی‌شوند.

ب: چون اتم‌های مواد دیامغناطیسی به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند، حضور میدان مغناطیسی خارجی نمی‌تواند در مواد دیامغناطیسی دوقطبی‌های مغناطیسی القا کند.

ج: مواد فرومغناطیسی علاوه بر داشتن دوقطبی‌های مغناطیسی، حوزهٔ مغناطیسی نیز دارند.

د: مواد فرومغناطیسی نرم برای ساخت آهنرباهای غیردائم و مواد فرومغناطیسی سخت برای ساختن آهنرباهای دائمی مناسب هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۱۰۳)

تقسیم‌بندی مواد از نظر خاصیت مغناطیسی

۱ـ موارد پارامغناطیسی: دوقطبی مغناطیسی دارند، حوزه مغناطیسی ندارند. دوقطبی‌ها به صورت کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالص ایجاد نمی‌کنند با قرار دادن مواد پارامغناطیس درون میدان مغناطیسی قوی خارجی دوقطبی‌های آن مقدار مختصری در راستای خطوط میدان منظم می‌شوند: اورانیوم ـ پلاتین ـ آلمینیوم ـ سدیم ـ اکسیژن و اکسید نیتروژن پارامغناطیس هستند.

۲ـ مواد دیامغناطیسی: اتم‌های مواد دیامغناطیس نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی در این مواد شود.

۳ـ مواد فرومغناطیسی: اتم‌های این مواد به طور ذاتی دوقطبی مغناطیسی دارند. آهن، نیکل و کبالت خالص فرومغناطیس نرم و آلیاژهای آن‌ها فرومغناطیس سخت هستند. مواد فرومغناطیس حوزه مغناطیسی دارند از مواد فرومغناطیس نرم برای ساخت آهنرباهای غیردائمی و از فرومغناطیس سخت برای ساخت آهنرباهای دائمی استفاده می‌شود.

بررسی موارد:

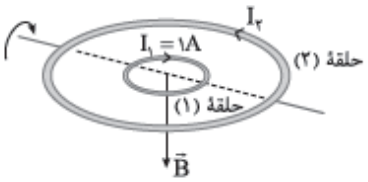
الف: اتم‌های مواد پارامغناطیسی، خاصیت مغناطیسی دارند اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند، به همین دلیل میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند و جذب آهربا نمی‌شوند. (✗)

ب: اتم‌های مواد دیامغناطیسی به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند با وجود این حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی در مواد دیامغناطیسی شود. (✗)

ج: درست است. (✓)

د: درست است. (✓)

دو حلقهٔ هم‌مرکز حامل جریان بر روی یک صفحه قرار دارند و مطابق شکل، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با بزرگی $۳\times۱۰^{-۲}\,G$ را در مرکز حلقه‌ها و به سمت پایین ایجاد کرده‌اند. اگر حلقهٔ (۲) را حول محور نشان داده شده در شکل ۹۰° بچرخانیم تا سطح آن عمود بر سطح حلقهٔ (۱) شود، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ها چند گاوس تغییر می‌کند؟ (شعاع حلقهٔ (۱) برابر با $۵\,cm$ و $\mu_۰ = ۱/۲\times۱۰^{-۶}\,\frac{T.m}{A}$ است.)



۱) ۱۵×۱۰^{-۲}
۲) ۹×۱۰^{-۲}
۳) ۱۸×۱۰^{-۲}
۴) ۱۲×۱۰^{-۲}

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره *توی فصل مغناطیس سعی کن تجسم خوبی را از شکل‌های فضایی و سه‌بُعدی داشته باشی.*

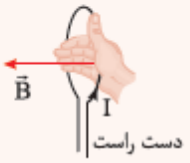
درس‌نامه

اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌های به هم چسبیدهٔ حامل جریان در وسط حلقه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

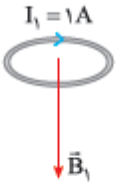
$$B = \frac{\mu_۰ NI}{۲R}$$

- B: میدان مغناطیسی (T)
- $\mu_۰$: تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$
- N: تعداد حلقه
- I: جریان عبوری از حلقه (A)
- R: شعاع حلقه (m)

برای تعیین جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان در حلقه‌های به هم چسبیده و در مرکز حلقه‌ها، از قاعدهٔ دست راست مطابق شکل مقابل استفاده می‌کنیم:



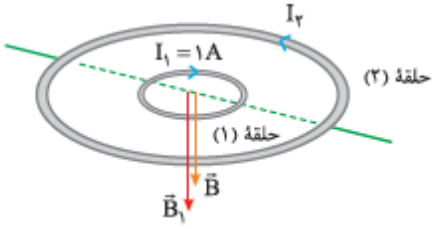
پاسخ تشریحی **گام اول:** میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ (۱) را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر درمی‌یابیم که طبق قاعدهٔ دست راست جهت میدان ناشی از حلقهٔ (۱) به سمت پایین است.



$$B = \frac{\mu_۰ NI}{۲R} \Rightarrow B = \frac{۱/۲\times۱۰^{-۶}\times۱\times۱}{۲\times۵\times۱۰^{-۲}} = ۱۲\times۱۰^{-۶}\,T \xrightarrow{۱T=۱۰^{۴}G} B_۱ = ۱۲\times۱۰^{-۲}\,G$$

$$\Rightarrow \vec{B}_۱ = -۱۲\times۱۰^{-۲}(G)\vec{j}$$

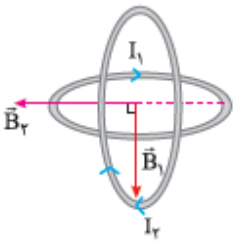
گام دوم: حالا با داشتن میدان مغناطیسی برایند و میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ (۱)، میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ (۲) را حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$\vec{B} = \vec{B}_۱ + \vec{B}_۲ \Rightarrow -۳\times۱۰^{-۲}(G)\vec{j} = -۱۲\times۱۰^{-۲}(G)\vec{j} + \vec{B}_۲$$

$$\Rightarrow \vec{B}_۲ = ۹\times۱۰^{-۲}(G)\vec{j}$$

گام سوم: اگر حلقهٔ (۲) را 90° بچرخانیم، میدان مغناطیسی ناشی از آن در مرکز دو حلقه نیز، 90° می‌چرخد، بنابراین میدان‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ در این حالت بر یکدیگر عمود می‌شوند و برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی برایند مطابق شکل زیر داریم:



$$B' = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B' = \sqrt{(12\times10^{-2})^2 + (9\times10^{-2})^2}$$

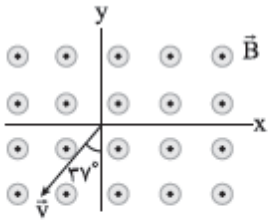
$$\Rightarrow B' = 3\times10^{-2}\sqrt{4^2+3^2} = 15\times10^{-2}\,G$$

گام چهارم: مقدار تغییر میدان مغناطیسی در حالت دوم نسبت به حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$B' - B = (15\times10^{-2}) - (3\times10^{-2}) = 12\times10^{-2}\,G$$

تست و پاسخ ۲۸

یک ذرهٔ باردار با بار $q = -2\,\mu C$ تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت برون‌سویی به بزرگی $2\times10^{3}\,G$ در حال حرکت است. مطابق شکل در لحظهٔ t ذره با سرعت $\vec{v}$ به بزرگی $2\times10^{5}\,m/s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره در این لحظه با جهت مثبت محور x چه زاویه‌ای می‌سازد و بزرگی آن چند نیوتون است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



۱) 8×10^{-2} ، 37°

۲) 8×10^{-2} ، 53°

۳) $4/8\times10^{-2}$ ، 37°

۴) $4/8\times10^{-2}$ ، 53°

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

اگر ذرهٔ باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند و نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ بر آن وارد شود، نیروی $\vec{F}$ همواره بر هر دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است.

$$\vec{F} \perp \vec{v} \quad , \quad \vec{F} \perp \vec{B}$$

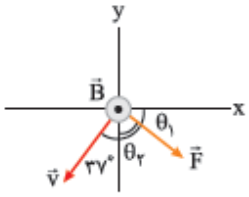
اما بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ ممکن است زاویه‌های مختلفی با هم تشکیل دهند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار q را به دست می‌آوریم. در این‌جا بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ بر هم عمود هستند، یعنی $\theta = 90^\circ$ است.

$$F = |q|vB\sin\theta \xrightarrow[v=2\times10^{5}\,m/s,\ B=2\times10^{-3}\,G=2\times10^{-1}\,T]{|q|=2\mu C=2\times10^{-6}\,C,\ \theta=90^\circ} F = 2\times10^{-6}\times2\times10^{5}\times2\times10^{-1}\times\sin 90^\circ = 8\times10^{-2}\,N$$

بنابراین ۳ و ۴ رد می‌شوند.

گام دوم: جهت نیروی $\vec{F}$ را با استفاده از قاعدهٔ دست چپ تعیین کرده و روی شکل نشان می‌دهیم (توجه کنید که بار ذره، منفی است).



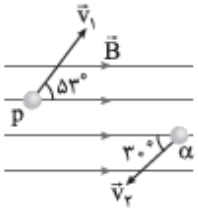
$\vec{F}$ و $\vec{v}$ بر هم عمود هستند؛ پس داریم:

$$\theta_2 = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$\theta_1 = 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

یعنی نیروی $\vec{F}$ با جهت مثبت محور x زاویهٔ 37° می‌سازد و ۱ درست است.

یک پروتون و یک ذرهٔ α ($_{2}^{4}He^{2+}$) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت‌اند. اگر در لحظهٔ نشان داده شده در شکل زیر، تندی دو ذره برابر و شتاب پروتون برابر $\vec{a}_p$ باشد، شتاب ذرهٔ α برابر کدام است؟ (جرم پروتون = جرم نوترون و $\sin 53^\circ = 0/8$)



۱) $\frac{5}{4}\vec{a}_p$

۲) $-\frac{5}{4}\vec{a}_p$

۳) $\frac{5}{16}\vec{a}_p$

۴) $-\frac{5}{16}\vec{a}_p$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره قانون دوم نیوتون به جهت گستردگی کاربرد آن، قابلیت ترکیب با بسیاری از روابط فیزیکی دیگر را دارد. این موضوع بارها در تست‌های کنکور دیده شده و این سؤال نیز یک نمونه از آن است.

درس‌نامه

اگر بر ذرهٔ بارداری به جرم m و بار الکتریکی q که در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند، نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد شود و شتاب $\vec{a}$ را پیدا کند، با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{matrix} F = |q|vB\sin\theta \\ F = ma \end{matrix}\right\} \Rightarrow ma = |q|vB\sin\theta$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ذرهٔ α همان هستهٔ اتم هلیم است که دو پروتون و دو نوترون دارد.

$$q_\alpha = +2e \quad , \quad e = 1/6\times10^{-19}\,C$$

$$m_\alpha = 2m_P + 2m_N \xrightarrow{m_P=m_N} m_\alpha = 4m_P$$

گام دوم: نسبت اندازهٔ شتاب پروتون و ذرهٔ آلفا را به دست می‌آوریم:

$$\frac{m_p a_p}{m_\alpha a_\alpha} = \frac{q_p v_p B_p \sin\theta_p}{q_\alpha v_\alpha B_\alpha \sin\theta_\alpha} \xrightarrow[q_\alpha=2e,\,B_p=B_\alpha,\,\theta_\alpha=150^\circ]{q_p=e,\,v_p=v_\alpha,\,\theta_p=53^\circ,\,m_\alpha=4m_p}$$

$$\frac{m_p}{4m_p}\times\frac{a_p}{a_\alpha} = \frac{e}{2e}\times1\times1\times\frac{\sin53^\circ}{\sin150^\circ} \Rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{a_p}{a_\alpha} = \frac{1}{2}\times\frac{0/8}{0/5}$$

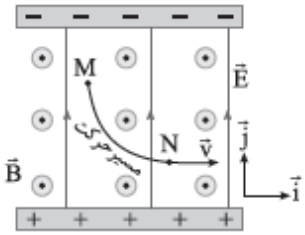
$$\Rightarrow \frac{a_p}{a_\alpha} = \frac{16}{5} \Rightarrow a_\alpha = \frac{5}{16}a_p$$

پس ۱ و ۲ رد می‌شوند.

گام سوم: پروتون و ذرهٔ آلفا (α) هر دو دارای بار مثبت هستند و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر آن‌ها با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌گردد. از طرفی با توجه به قانون دوم نیوتون می‌دانیم که شتاب وارد بر هر ذره با نیروی خالص وارد بر آن، هم‌جهت است؛ بنابراین مطابق شکل زیر داریم:

پس در این‌جا شتاب وارد بر پروتون و شتاب ذرهٔ α در خلاف جهت هم هستند و ۴ درست است.

در شکل زیر ذره‌ای به جرم $20\ mg$ و بار الکتریکی $-2\mu C$ در میدان‌های یکنواخت الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ از نقطهٔ M رها می‌شود و با سرعت $\vec{v}=(200\ m/s)\vec{i}$ از نقطهٔ N می‌گذرد. اگر بزرگی میدان الکتریکی $2\times10^{2}\ N/C$ و بزرگی میدان مغناطیسی $7500\ G$ باشد، بزرگی نیروی وارد بر ذره در لحظه‌ای که از نقطهٔ N عبور می‌کند، چند میلی‌نیوتون است؟ (از نیروهای گرانش و مقاومت هوا صرف نظر کنید.)



۱) ۰/۱

۲) ۰/۳

۳) ۰/۵

۴) ۰/۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره نیروهای ناشی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی وارد بر ذره را به طور جداگانه به دست آورید، سپس این دو نیرو را به صورت برداری با هم جمع کنید تا نیروی خالص وارد بر ذره به دست آید.

درس‌نامه گاهی ممکن است که هم‌زمان، دو نیروی $\vec{F}_E$ و $\vec{F}_B$ به ترتیب ناشی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر یک ذرهٔ باردار اثر کنند. در این صورت نیروی خالص وارد بر ذره، برایند دو نیروی فوق است.

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_E+\vec{F}_B$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا نیروی حاصل از میدان الکتریکی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_E=q\vec{E}\xrightarrow[E=2\times10^{2}\ N/C]{q=-2\mu C=-2\times10^{-6}C}\vec{F}_E=-2\times10^{-6}\times(2\times10^{2})\vec{j}$$

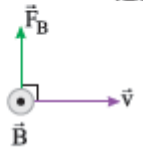
$$\Rightarrow \vec{F}_E=(-4\times10^{-4}N)\vec{j}=(-0/4\ mN)\vec{j}$$

گام دوم: نیروی حاصل از میدان مغناطیسی وارد بر ذره را نیز به دست می‌آوریم:

$$F_B=|q|vB\sin\theta\xrightarrow[B=7500G=7500\times10^{-4}T=0/75T]{|q|=2\mu C=2\times10^{-6}C,\ v=200\ m/s,\ \theta=90^\circ}F_B=2\times10^{-6}\times200\times0/75\times\sin90^\circ$$

$$=3\times10^{-4}N=0/3\ mN$$

با توجه به این‌که $q<0$ است، با استفاده از قاعدهٔ دست چپ، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره در نقطهٔ N، رو به بالا است.



$$\vec{F}_B=(0/3\ mN)\vec{j}$$

گام سوم: اکنون نیروی خالص وارد بر ذره را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_E+\vec{F}_B\Rightarrow\vec{F}_{net}=(-0/4\ mN)\vec{j}+(0/3\ mN)\vec{j}=(-0/1\ mN)\vec{j}$$

پس بزرگی نیروی وارد بر ذره، هنگام عبور از نقطهٔ N، $0/1\ mN$ است.

تست و پاسخ ۳۱

Fe^{3+} و $S^{2-} \Rightarrow Fe_2S_3$

Cu^{+} و $P^{3-} \Rightarrow Cu_3P$

اگر زیروندها در فرمول شیمیایی ترکیبی از O و N همانند زیروندها در سولفیدی از آهن با بالاترین ظرفیت باشد، نام ترکیب ..... بوده و اگر مجموع زیروندها در فرمول شیمیایی فسفید فلز مس با پایین‌ترین ظرفیت با مجموع زیروندها در اکسیدی از گوگرد برابر باشد، نام ترکیب ..... است.

۱) دی‌نیتروژن تری‌اکسید ـ گوگرد دی‌اکسید
۲) نیتروژن مونوکسید ـ گوگرد تری‌اکسید
۳) نیتروژن مونوکسید ـ گوگرد دی‌اکسید
۴) دی‌نیتروژن تری‌اکسید ـ گوگرد تری‌اکسید

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی با توجه به این‌که آهن دارای دو یون Fe^{2+} و Fe^{3+} است، فرمول سولفیدی از آن با بالاترین ظرفیت فلز، به صورت Fe_2S_3 است:

Fe^{3+} و $S^{2-} \Rightarrow Fe_2S_3$

بنابراین فرمول اکسید نیتروژن به صورت N_2O_3 بوده و نام آن دی‌نیتروژن تری‌اکسید است.

با توجه به این‌که مس دارای دو یون Cu^{+} و Cu^{2+} است، فرمول فسفیدی از آن با پایین‌ترین ظرفیت فلز، به صورت Cu_3P است:

Cu^{+} و $P^{3-} \Rightarrow Cu_3P$ مجموع زیروندها $= 3 + 1 = 4$

گوگرد دارای دو اکسید معروف به فرمول‌های SO_2 و SO_3 است که فقط در گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، مجموع زیروندها برابر ۴ است.

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) از گاز نجیب با بیشترین درصد فراوانی در هواکره، برای خنک‌کردن قطعات در تصویربرداری‌های پزشکی استفاده می‌شود. ← گاز آرگون

ب) از گاز نجیب تهیه‌شده در پتروشیمی شیراز در ساخت لامپ‌های رشته‌ای استفاده می‌شود. ← گاز آرگون

پ) از گاز با بیشترین درصد مولی در ترکیب هوای مایع، در صنعت برای گندزدایی و انجماد میوه‌ها استفاده می‌شود. ← گاز نیتروژن

ت) بر اثر شرجی‌شدن هوا، درصد حجمی گاز اکسیژن نسبت به گاز کریپتون، کاهش بیشتری پیدا می‌کند. ← افزایش رطوبت هوا (افزایش درصد حجمی بخار آب در هوا)

۱) الف ـ ت
۲) الف ـ پ
۳) ب ـ پ
۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

الف) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره آرگون است، اما از هلیم برای خنک‌کردن قطعات دستگاه‌های تصویربرداری پزشکی استفاده *می‌شه، نه آرگون!*

ب) گاز آرگون با خلوص بالا در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع تهیه می‌شود. از این گاز در ساخت لامپ‌های رشته‌ای استفاده می‌شود.

پ) با توجه به قوانین مربوط به گازها، می‌دانیم که در دما و فشار معین، درصد حجمی یک گاز در یک مخلوط با درصد مولی آن برابر است. نیتروژن بیشترین درصد حجمی و در نتیجه بیشترین درصد مولی هوای مایع را تشکیل می‌دهد، اما در صنعت از گاز اوزون برای گندزدایی میوه‌ها استفاده می‌شود.

ت) درصد حجمی O_2 در هوای پاک و خشک ($\simeq$ ٪۲۱)، خیلی‌خیلی بیشتر از کریپتون (٪۰/۰۰۰۱) است. اضافه‌شدن بخار آب به هوای پاک و خشک، درصد حجمی O_2 را به میزان بیشتری نسبت به کریپتون کم می‌کند.

$$\text{درصد حجمی گاز A} = \frac{\text{حجم گاز A}}{\text{حجم مخلوط گازی}} \times ۱۰۰$$

$$\frac{\text{شرجی‌شدن هوا (افزایش رطوبت هوا)}}{\text{افزایش حجم مخلوط گازی هوا}} \rightarrow \text{درصد حجمی گاز A} \downarrow = \frac{\text{(ثابت) حجم گاز A}}{\text{(افزایش) حجم مخلوط گازی} \uparrow} \times ۱۰۰$$

هر چه درصد حجمی گاز A در مخلوط گازی بیشتر باشد، با تغییر (افزایش) حجم مخلوط گازی، درصد حجمی گاز A بیشتر تغییر (کاهش) می‌یابد.

در مخلوطی از آلومینیم و آمونیوم پرکلرات (NH_4ClO_4)، واکنش زیر انجام شده و این دو ماده به طور کامل مصرف می‌شوند. به تقریب چند درصد از جرم نمونهٔ جامد در این فرایند، کاسته می‌شود؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16, Al=27, Cl=35/5 : g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Al(s) + NH_4ClO_4(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + AlCl_3(s) + H_2O(g) + N_2(g)$

۱) ۸/۶ ۲) ۳۰/۸ ۳) ۵۲ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره با توجه به این‌که کاهش جرم ایجادشده مربوط به فراورده‌های گازی‌شکل است، بعد از موازنهٔ واکنش، براساس ضرایب استوکیومتری، مجموع جرم واکنش‌دهنده‌های جامد و مجموع جرم فراورده‌های گازی رو به دست بیار و نسبت جرم گازهای حاصل به جامد اولیه رو محاسبه کن و درصد بگیر.

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش رو موازنه می‌کنیم.

$$10Al(s) + 6NH_4ClO_4(s) \rightarrow 4Al_2O_3(s) + 2AlCl_3(s) + 12H_2O(g) + 3N_2(g)$$

گام دوم: مجموع جرم واکنش‌دهنده‌های جامد را با توجه به ضرایب استوکیومتری به دست می‌آوریم.

$$\text{جرم آلومینیم} = 10 \times 27 = 270\,g$$

$$\text{جرم آمونیوم پرکلرات} = 6 \times \big(1(14) + 4(1) + 1(35/5) + 4(16)\big) = 6 \times 117/5 = 705\ g$$

$$\text{مجموع جرم واکنش‌دهنده‌های جامد (جرم نمونهٔ جامد)} = 270 + 705 = 975\ g$$

گام سوم: کاهش جرم ایجادشده به علت خروج فراورده‌های گازی است. اکنون باید مجموع جرم این فراورده‌های گازی را نیز با توجه به ضرایب استوکیومتری محاسبه کنیم.

$$\text{جرم بخار آب} = 12 \times \big(2(1) + 1(16)\big) = 12 \times 18 = 216\ g$$

$$\text{جرم گاز نیتروژن} = 3 \times \big(2(14)\big) = 3 \times 28 = 84\ g$$

$$\text{کاهش جرم مخلوط} = 216 + 84 = 300\ g$$

گام چهارم: درصد کاهش جرم نمونهٔ جامد در این واکنش، از فرمول زیر به دست می‌آید:

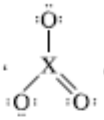
$$\frac{\text{کاهش جرم مخلوط}}{\text{جرم نمونهٔ جامد}} \times 100 = \frac{300}{975} \times 100 \xrightarrow{\times \frac{4}{4}\ \text{(جهت راحت‌ترشدن محاسبات)}} = \frac{4}{4} \times \frac{300}{975} \times 100 = \frac{1200}{3900} \times 100$$

$$\frac{1200}{3900} = 40 \Rightarrow = \frac{12}{40} \times 100 = 30$$

درصد کاهش جرم نمونهٔ جامد اندکی از ۳۰٪ بیشتر است که می‌شه ۲.

تست و پاسخ ۳۴

کدام عبارت نادرست است؟

۱) در ساختار لوویس  ، عنصر X می‌تواند عنصری از گروه ۱۶ جدول دوره‌ای باشد.

۲) اتم مرکزی در NH_3 مانند $SOCl_2$، دارای یک جفت الکترون ناپیوندی است.

۳) مجموع شمار الکترون‌ها در ساختار لوویس SeO_2 بیشتر از ICl_2^+ است.

۴) هر سه مولکول CO، N_2 و HCN، در ساختار خود دارای پیوند سه‌گانه هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

نکته مجموع شمار الکترون‌های به‌کاررفته در ساختار لوویس یک گونه برابر است با:

بار با در نظر گرفتن علامت − مجموع شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها = شمار الکترون‌های به‌کاررفته در ساختار لوویس یک گونه

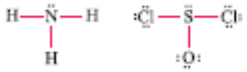
بررسی گزینه‌ها:

۱) با توجه به ساختار لوویس مولکول داده‌شده، در این مولکول مجموع شمار کل الکترون‌های لایهٔ ظرفیت اتم‌ها برابر با ۲۴ است، پس خواهیم داشت:

$$\text{شمار کل الکترون‌های ظرفیت} = ۲۴ \Rightarrow \underbrace{(۳\times ۶)}_{O} + \underbrace{(\text{شمار الکترون‌های ظرفیتی}\times ۱)}_{X} = ۲۴$$

$$\Rightarrow X \text{ شمار الکترون‌های ظرفیتی} = ۶ \Rightarrow X \text{ در گروه ۱۶ قرار دارد.}$$

۲) با رسم ساختار لوویس مولکول‌های NH_3 و $SOCl_2$ می‌بینیم که در هر دو ساختار، اتم مرکزی دارای یک جفت الکترون ناپیوندی است.



۳) مجموع شمار الکترون‌ها در ساختار لوویس SeO_2 و ICl_2^+ به ترتیب برابر ۱۸ و ۲۰ است.

$$SeO_2 = \underbrace{۱(۶)}_{Se} + \underbrace{۲(۶)}_{O} = ۱۸$$

$$ICl_2^+ = \underbrace{۱(۷)}_{I} + \underbrace{۲(۷)}_{Cl} - \underbrace{(+۱)}_{\text{بار}} = ۲۰$$

۴)

تست و پاسخ ۳۵

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **در مراحل جداسازی اجزای هواکره، ترکیب‌ها زودتر از عناصر جدا می‌شوند.** (CO_2 و H_2O ← ترکیب‌ها ؛ N_2، O_2 و Ar ← عناصر)
- **درصد حجمی هلیم در گاز طبیعی، حدود ۱۴۰۰ برابر درصد حجمی آن در هواکره (۰/۰۰۰۵ درصد) است.** (≃ ٪۷ ← درصد حجمی هلیم در گاز طبیعی)
- **همهٔ اجزای هواکره، در اثر تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع در ستون تقطیر جداسازی می‌شوند.**
- **در اثر تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، گاز اکسیژن به صورت خالص به دست می‌آید.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

فقط عبارت اول درست است.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در فرایند جداسازی اجزای هواکره، با سردکردن هوا، قبل از رسیدن به دمای $-۲۰۰^\circ C$ و تشکیل هوای مایع، به ترتیب H_2O و CO_2 (ترکیب‌های هواکره) به حالت جامد درمی‌آیند و از هوا جدا می‌شوند.

عبارت دوم: ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد که ۱۴۰۰۰ برابر درصد حجمی آن در هواکره است.

$$\frac{\text{درصد حجمی He در گاز طبیعی}}{\text{درصد حجمی He در هواکره}} = \frac{۷}{۰/۰۰۰۵} = ۱۴۰۰۰$$

عبارت سوم: *نه کی گفته؟!* مثلاً H_2O و CO_2 طی فرایند سردکردن هوا، به شکل جامد قبل از مایع‌شدن هوا از مخلوط گازی جدا می‌شوند.

عبارت چهارم: به دلیل تفاوت بسیار کم نقطهٔ جوش Ar و O_2، جداسازی آن‌ها از هم، کامل نبوده و تهیهٔ اکسیژن صد در صد خالص در این فرایند دشوار است.

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **ردپای کربن دی‌اکسید در تولید مقدار معینی برق با استفاده از انرژی خورشید، کم‌تر از گرمای زمین است.**
- **اگر هواکره وجود نداشت، میانگین دمای کرهٔ زمین به ۲۵۵ کلوین کاهش می‌یافت.**
- **در شیمی سبز، فرایندها و فراورده‌هایی جست‌وجو می‌شوند که بتوان به کمک آن‌ها کیفیت زندگی را افزایش داد و از طبیعت محافظت کرد.**
- **بخش عمده‌ای از پرتوهای خورشیدی که به سمت زمین گسیل می‌شوند، به وسیلهٔ مولکول‌های گازی به فضا برمی‌گردند.**

$۲۵۵K = -۱۸^\circ C$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

عبارت‌های دوم و سوم درست هستند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: میزان کربن دی‌اکسید تولیدشده با استفاده از انرژی خورشید بیشتر از گرمای زمین است.

باد < گرمای زمین < انرژی خورشید < گاز طبیعی < نفت خام < زغال‌سنگ :ترتیب ردپای کربن دی‌اکسید منابع تولید برق

عبارت چهارم: بخش عمدهٔ پرتوهای خورشیدی که به سمت زمین گسیل می‌شوند، به وسیلهٔ زمین جذب می‌شوند.

با توجه به جدول مقابل که بخشی از جدول دوره‌ای عنصرها را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

گروه / دوره	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۲	A	B	C	D
۳	E		M	

۱) ساختار لوویس ترکیب حاصل از عنصر A و C می‌تواند دو جفت‌الکترون ناپیوندی داشته باشد.

۲) در ترکیب(های) دوتایی رایج حاصل از دو عنصر C و M، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی برابر ۲ است.

۳) شمار الکترون‌های ناپیوندی در ED_4، ۴ برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در ساده‌ترین ترکیب حاصل از عنصر هیدروژن با عنصر B است.

۴) اتم هیدروژن و عنصرهای A و B، می‌توانند با یکدیگر ترکیب مولکولی با فرمول HAB تشکیل دهند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

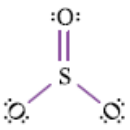
پاسخ تشریحی نماد واقعی عنصرهای دورهٔ ۲ و ۳ از گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ به صورت زیر است:

گروه / دوره	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۲	$\cdot\dot{C}\cdot$	$\cdot\ddot{N}\cdot$	$:\ddot{O}\cdot$	$:\ddot{F}\cdot$
۳	$\cdot\dot{Si}\cdot$	$\cdot\ddot{P}\cdot$	$:\ddot{S}\cdot$	$:\ddot{Cl}\cdot$

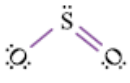
بررسی گزینه‌ها:

۱) عناصر C و O می‌توانند ترکیب‌های CO و CO_2 ایجاد کنند که در CO با ساختار $:C\equiv O:$، دو جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۲) عناصر S و O، دو ترکیب SO_2 و SO_3 با ساختارهای زیر را می‌سازند.

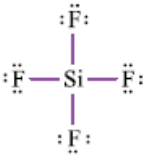


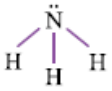
$$\frac{\text{جفت‌الکترون ناپیوندی}}{\text{جفت‌الکترون پیوندی}}=\frac{۸}{۴}=۲$$



$$\frac{\text{جفت‌الکترون ناپیوندی}}{\text{جفت‌الکترون پیوندی}}=\frac{۶}{۳}=۲$$

۳) ساختار ترکیب SiF_4 و هم‌چنین ساده‌ترین ترکیب هیدروژن‌دار نیتروژن، یعنی NH_3 را رسم می‌کنیم:





$$\frac{\text{الکترون‌های ناپیوندی } SiF_4}{\text{جفت‌الکترون‌های پیوندی } NH_3}=\frac{۲۴}{۳}=۸$$

۴) با توجه به ظرفیت اتم‌های C، N و H، در نتیجهٔ پیوند اشتراکی بین آن‌ها، ترکیبی با فرمول HCN ایجاد می‌شود.

در یک شهر، سالانه ۳ میلیون لیتر بنزین (C_8H_{18}) توسط خودروها سوزانده می‌شود. جرم کربن دی‌اکسید تولیدشده در اثر سوختن کامل این مقدار بنزین در یک سال به تقریب چند تن است و برای از بین بردن ردپای کربن دی‌اکسید ناشی از سوخت این خودروها، چند درخت تنومند لازم است؟ (چگالی بنزین $0/76\,g.mL^{-1}$ و یک درخت تنومند سالانه حدود ۵۰ کیلوگرم کربن دی‌اکسید مصرف می‌کند، $O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1}$)

۱) ۱۴۰۸۰۰ _ ۷۰۴۰ ۲) ۱۴۸۰۰۰ _ ۷۴۰۰ ۳) ۱۴۸۰۰۰ _ ۷۰۴۰ ۴) ۱۴۰۸۰۰ _ ۷۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره: اول از همه، معادلهٔ سوختن بنزین رو بنویس و موازنه کن و از لیتر بنزین، جرم CO_2 تولیدی رو به دست بیار. برای قسمت دوم هم فقط کافیه جرم CO_2 برحسب kg رو به ۵۰ تقسیم کنی.

پاسخ تشریحی: **گام اول:** معادلهٔ سوختن کامل بنزین را می‌نویسیم و موازنه می‌کنیم:

$$C_8H_{18}(l)+\frac{25}{2}O_2(g)\rightarrow 8CO_2(g)+9H_2O(g)$$

توجه: لازم نبود که معادلهٔ واکنش رو کامل بنویسیم و موازنه کنیم! در واکنش سوختن کامل هیدروکربن‌ها، اگر ضریب هیدروکربن را یک بگیریم، ضریب CO_2 برابر زیروند کربن در اون هیدروکربن می‌شه؛ یعنی $1\,mol\,C_8H_{18} \sim 8\,mol\,CO_2$.

گام دوم: حالا از لیتر بنزین به جرم CO_2 می‌رسیم.

روش اول: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{حجم}\times\text{چگالی}}_{C_8H_{18}}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{CO_2}}=\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}\Rightarrow\frac{0/02\times 3\times10^6\times10^3}{1\times114}=\frac{x}{8\times44}$$

$$\Rightarrow x=20\times8\times44\times10^6\,g\xrightarrow{1\,g=10^{-6}\,ton}=7040\,ton\,CO_2$$

روش دوم: استفاده از کسر تبدیل:

$$3\times10^6\,LC_8H_{18}\times\frac{10^3\,mLC_8H_{18}}{1LC_8H_{18}}\times\frac{0/76\,g\,C_8H_{18}}{1mL\,C_8H_{18}}\times\frac{1mol\,C_8H_{18}}{114\,g\,C_8H_{18}}\times\frac{8\,mol\,CO_2}{1mol\,C_8H_{18}}$$

$$\times\frac{44\,g\,CO_2}{1mol\,CO_2}\times\frac{1\,ton\,CO_2}{10^6\,g\,CO_2}=7040\,ton\,CO_2$$

گام سوم: در یک سال ۷۰۴۰ تن (معادل ۷،۰۴۰،۰۰۰ کیلوگرم) کربن دی‌اکسید توسط خودروها تولید می‌شود. هر درخت توانایی حذف ۵۰kg کربن دی‌اکسید را در سال دارد، پس:

$$7040000\,kgCO_2\times\frac{1\,\text{درخت}}{50\,kg\,CO_2}=140800\,\text{درخت}$$

تست و پاسخ ۳۹

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) آمونیاک تولیدشده در فرایند هابر با رسیدن دما و فشار به شرایط بهینه، به آسانی قابل جداسازی است.

ب) هابر، دما و فشار مناسب در مجاورت کاتالیزگر آهن را به عنوان شرایط بهینهٔ تولید آمونیاک در نظر گرفت.

پ) مقایسهٔ نقطهٔ جوش مواد شرکت‌کننده در فرایند هابر به صورت $H_2 > N_2 > NH_3$ است.

ت) در شرایط بهینهٔ فرایند هابر، نمی‌توان تمام هیدروژن و نیتروژن شرکت‌کننده در واکنش را به آمونیاک تبدیل کرد.

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

عبارت‌های «ب»، «پ» و «ت» درست هستند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌های «الف» و «ت»:

الف) در فرایند هابر، پس از ایجاد شرایط بهینه، مقدار قابل توجهی آمونیاک تولید می‌شود، ولی همهٔ واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نمی‌شود و در ظرف واکنش، هر سه گاز N_2 و H_2 واکنش نداده و NH_3 تولیدی، وجود دارند. در این مرحله با سردکردن مخلوط واکنش تا دمای کمی کم‌تر از نقطهٔ جوش NH_3، آمونیاک به شکل مایع از مخلوط جدا می‌شود.

ت) در فرایند هابر، مقدار قابل توجهی آمونیاک تولید می‌شود، اما همهٔ واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نخواهند شد، زیرا این واکنش $(N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3)$ برگشت‌پذیر است.

تست و پاسخ ۴۰

گازهای A و B را در دما و فشار یکسان مخلوط کرده‌ایم، اگر چگالی مخلوط برابر ۲/۱۹ گرم بر لیتر و درصد مولی گاز B در مخلوط برابر ۷۰٪ باشد، جرم مولی گاز B برحسب گرم بر مول، کدام است؟ (چگالی و جرم مولی گاز A در همان شرایط را به ترتیب $2/4\ g.L^{-1}$ و $60\ g.mol^{-1}$ در نظر بگیرید.)

۱) ۴۲/۵ ۲) ۴۵/۲ ۳) ۴۸/۲ ۴) ۵۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته طبق قانون آووگادرو در دما و فشار یکسان:

۱) حجم یک مول از گازهای مختلف (حجم مولی گازها) با هم برابر است.

۲) درصد مولی گازها با درصد حجمی آن‌ها برابر است.

۳) چگالی گازها با جرم مولی آن‌ها رابطهٔ مستقیم دارد.

پاسخ تشریحی روش اول: **گام اول:** فرض می‌کنیم حجم مخلوط ۱۰۰ لیتر باشد؛ بنابراین جرم مخلوط برابر ۲۱۹ گرم خواهد بود:

$$\text{چگالی مخلوط} = \frac{\text{جرم مخلوط}}{\text{حجم مخلوط}} \Rightarrow ۲/۱۹ = \frac{\text{جرم مخلوط}}{۱۰۰} \Rightarrow \text{جرم مخلوط} = ۲۱۹\ g$$

گام دوم: ۳۰٪ حجم مخلوط را گاز A تشکیل می‌دهد، یعنی ۳۰ لیتر؛ پس حالا می‌توانیم جرم گاز A و سپس جرم گاز B موجود در مخلوط را حساب کنیم.

$$\text{چگالی A} = \frac{\text{جرم A}}{\text{حجم A}} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{\text{جرم A}}{۳۰} \Rightarrow \text{جرم A} = ۷۲\ g \qquad \text{جرم B} = \text{جرم مخلوط} - \text{جرم A} = ۲۱۹ - ۷۲ = ۱۴۷\ g$$

گام سوم: ۷۰٪ حجم مخلوط را گاز B تشکیل می‌دهد، یعنی ۷۰ لیتر؛ پس چگالی گاز B برابر است با:

$$\text{چگالی B} = \frac{\text{جرم B}}{\text{حجم B}} = \frac{۱۴۷}{۷۰} = ۲/۱\ g.L^{-۱}$$

گام چهارم: در شرایط یکسان از لحاظ دما و فشار، چگالی گازها با جرم مولی آن‌ها رابطهٔ مستقیم دارد.

$$\frac{\text{چگالی گاز A}}{\text{چگالی گاز B}} = \frac{\text{جرم مولی گاز A}}{\text{جرم مولی گاز B}} \Rightarrow \frac{۲/۴}{۲/۱} = \frac{۶۰}{\text{جرم مولی گاز B}} \Rightarrow \text{جرم مولی گاز B} = \frac{۶۰ \times ۲/۱}{۲/۴} = ۵۲/۵\ g.mol^{-۱}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم در مخلوط واکنش، ۰/۷ مول گاز B و ۰/۳ مول گاز A وجود دارد، ابتدا حجم گاز A را پیدا می‌کنیم:

$$\text{حجم A} = \frac{\text{جرم A}}{\text{چگالی A}} \Rightarrow \text{حجم A} = \frac{\text{جرم مولی A} \times \text{مول A}}{\text{چگالی A}} \Rightarrow \frac{۰/۳ \times ۶۰}{۲/۴} = ۷/۵\ L$$

در شرایط یکسان دما و فشار، نسبت مولی گازها با نسبت حجمی آن‌ها برابر است:

$$۷/۵\ L\ A \times \frac{۷\ L\ B}{۳\ L\ A} = ۱۷/۵\ L\ B$$

حجم گاز B هم که معلوم شد. *کافیه* تو فرمول سادهٔ محاسبهٔ چگالی، جاگذاری کنیم:

$$\text{چگالی مخلوط} = \frac{\text{جرم مخلوط}}{\text{حجم مخلوط}} = \frac{(\text{جرم مولی B} \times \text{مول B}) + (\text{جرم مولی A} \times \text{مول A})}{\text{حجم B} + \text{حجم A}} = \frac{(۰/۳ \times ۶۰) + ۰/۷\ M_B}{۷/۵ + ۱۷/۵} = ۲/۱۹$$

$$\Rightarrow M_B = ۵۲/۵\ g.mol^{-۱}$$